

Matemática I

Transformada de Fourier Exemplos

Engenharia de Telecomunicações e Informática

Teresa Araújo
Departamento de Matemática

Transformada de $e^{-at}u(t)$

Exemplo 1: Determinar a transformada de Fourier da função $x(t) = e^{-at}u(t)$, com $a > 0$.

Usando a definição da função de Heaviside, $u(t)$, temos

$$e^{-at}u(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-at-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\int e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} \int -(a+j\omega) e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}$$

Transformada de $e^{-at}u(t)$

Logo

$$X(\omega) = -\frac{1}{a+j\omega} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^b = -\frac{1}{a+j\omega} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(e^{-(a+j\omega)b} - 1 \right)$$

Para que o limite exista é necessário que $\text{Re}(a+j\omega) > 0$. Nessa situação

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-(a+j\omega)b} = 0$$

e tem-se

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

Escrevemos

$$e^{-at}u(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{a+j\omega}$$

Transformada de $e^{-a|t|}$

Exemplo 2: Determinar a transformada de Fourier da função $x(t) = e^{-a|t|}$, com $a > 0$.

Usando a função módulo, temos

$$e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{at-j\omega t} dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-at-j\omega t} dt}_{I_2} \end{aligned}$$

Exemplo 2 (continuação): Cálculo de I_1

Sabemos que

$$\int e^{at-j\omega t} dt = \int e^{(a-j\omega)t} dt = \frac{1}{a-j\omega} \int (a-j\omega) e^{(a-j\omega)t} dt = \frac{1}{a-j\omega} e^{(a-j\omega)t}$$

Logo

$$I_1 = \frac{1}{a-j\omega} \lim_{c \rightarrow -\infty} \left[e^{(a-j\omega)t} \right]_c^0 = \frac{1}{a-j\omega} \lim_{c \rightarrow -\infty} \left(1 - e^{(a-j\omega)b} \right)$$

Para que o limite exista é necessário que $\text{Re}(a-j\omega) > 0$. Nessa situação

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} e^{(a-j\omega)c} = 0$$

e tem-se

$$I_1 = \frac{1}{a-j\omega}$$

Exemplo 2 (continuação): Cálculo de I_2

Para o cálculo de I_2 , procedemos de forma análoga. Sabemos que

$$\int e^{-at-j\omega t} dt = \int e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} \int -(a+j\omega) e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}$$

Logo

$$I_2 = -\frac{1}{a+j\omega} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^c = -\frac{1}{a+j\omega} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(e^{-(a+j\omega)b} - 1 \right)$$

Para que o limite exista é necessário que $\text{Re}(a+j\omega) > 0$. Nessa situação

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} e^{-(a+j\omega)c} = 0$$

e tem-se

$$I_2 = \frac{1}{a+j\omega}$$

Exemplo 2 (continuação):

Temos então

$$X(\omega) = I_1 + I_2 = \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega}$$

Reduzindo ao mesmo denominador vem

$$X(\omega) = \frac{a + j\omega}{(a - j\omega)(a + j\omega)} + \frac{a - j\omega}{(a - j\omega)(a + j\omega)}$$

Logo

$$X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Escrevemos

$$e^{-a|t|} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$